Sur la stabilité par produits tensoriels des F-complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques

Daniel Caro

ABSTRACT

Let Y be a separated and smooth k-scheme. We prove that the functor sp_{Y+}, which gives an equivalence of categories between overconvergent F-isocrystals and overcoherent F-isocrystals, commutes with tensor products. This implies the stability by tensor products of the category of F-complexes that split into overconvergent F-isocrystals. In the case of curves, we check that the category of holonomic F-complexes is equal to the category of F-complexes that split into overconvergent F-isocrystals. So, we get the stability of holonomicity by tensor products over curves.

Table des matières

Introduction

Cet article s'inscrit dans le long processus de l'obtention, quarante ans après les premières tentatives exposées par Grothendieck à l'IHES (voir [Gro68]), d'une cohomologie p-adique des variétés algébriques sur un corps de caractéristique p satisfaisant les propriétés analogues à celle de la cohomologie étale l-adique (avec l un nombre premier différent de p) sur ces mêmes variétés. À cette fin, en s'inspirant de la théorie des $\mathcal{D}$-modules en caractéristique nulle (par exemple sur les variétés analytiques), Berthelot a construit les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, défini leur holonomie et conjecturé la stabilité de l'holonomie par les opérations cohomologiques usuelles. Quoiqu'il ait établi leur stabilité par produits tensoriels externes, celle par produits tensoriels quelconques (ou « internes »), images directes et images inverses extraordinaires reste des conjectures (voir [Ber02, 6.3.6]). Pour bénéficier de coefficients stables, une autre approche a été de définir les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes ([Car05b]). Par [Car05b], la surholonomie est stable par images directes, images inverses extraordinaires, foncteurs duaux et donc par images directes extraordinaires et images inverses. Pour compléter la liste, il reste cependant à vérifier celle par produits tensoriels. Nous nous intéressons ici à ce problème de stabilité.

Cet article se compose comme suit.

Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques, de corps résiduel parfait k de caractéristique p, Y un k-schéma séparé et lisse. Quoique cela soit superflu (pour le cas général, on recolle) mais pour simplifier cette introduction, supposons que Y se plonge dans un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse $\mathcal{P}$ de fibre spéciale P tel qu'il existe un diviseur T de P satisfaisant $Y = \overline{Y} \setminus T$, où $\overline{Y}$ est l'adhérence de

2000 Mathematics Subject Classification 14F10, 14F30
Keywords: arithmetical $\mathcal{D}$-modules, Frobenius, tensor products
L'auteur a bénéficié du soutien du réseau européen TMR *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat numéro UE MRTN-CT-2003-504917).

Y dans P. On désigne par $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$, l'*anneau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{P}$ de niveau fini à singularités surconvergentes le long de T* (voir [Ber96b, 4.2.5]). En gros, un $\mathcal{D}$-module arithmétique est un module sur un anneau de la forme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$.

Dans la première partie, nous revoyons la construction des produits tensoriels de complexes quasi-cohérents de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Nous y vérifions leur indépendance vis à vis des diviseurs. Lorsque $\overline{Y}$ est lisse, d'après [Car05a, 2.5], on bénéficie du foncteur sp_+ de la catégorie des (F-)isocristaux surconvergents sur Y, catégorie définie par Berthelot dans [Ber96a] et [Ber86], dans celle des des (F-)$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans $\overline{Y}$ (la lettre F signifiant que l'on dispose d'une structure de Frobenius). Nous établissons dans la deuxième partie sa commutation aux produits tensoriels.

Nous avons défini dans [Car06a, 6.2.1] (et [Car06d, 2.2.4] pour le cas général), les « F-isocristaux surcohérents sur Y ». Celle-ci constitue une sous-catégorie pleine de celle des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans $\overline{Y}$. D'après [Car06d, 2.3.1], on dispose d'un foncteur sp_{Y+} (canoniquement isomorphe au précédent lorsque $\overline{Y}$ est lisse) de la catégorie des F-isocristaux surconvergents sur Y dans celle des F-isocristaux surcohérents sur Y. Ce foncteur sp_{Y+} est d'ailleurs une équivalence de catégories. Dans la troisième partie, nous vérifions la stabilité des F-isocristaux surcohérents par produits tensoriels. L'idée est d'utiliser le théorème de désingularisation de de Jong (voir [dJ96]) pour se ramener au cas où $\overline{Y}$ est lisse, puis d'utiliser la deuxième partie. Dans une quatrième partie, on déduit de cette stabilité la commutation (dans le cas général) de sp_{Y+} aux produits tensoriels.

Nous établissons dans la dernière partie la stabilité par produits tensoriels des F-complexes quasi-cohérents dévissables en F-isocristaux surconvergents (voir 5.1). Dans le cas où P est une courbe, nous prouvons que les F-complexes holonomes sont les F-complexes dévissables (voir 5.4). Il en résulte la stabilité par produits tensoriels de l'holonomie sur les courbes.

Notations La lettre $\mathcal{V}$ désigne un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$, de corps des fractions K de caractéristique 0. De plus, $s \geqslant 1$ est un entier fixé et F la puissance $s$ème de l'endomorphisme de Frobenius. Les modules sont par défaut à gauche. Si $\mathcal{E}$ est un faisceau abélien, on pose $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}} := \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Sauf mention explicite du contraire, m est un entier positif fixé.

En général, les $\mathcal{V}$-schémas formels faibles (voir par exemple [Mer72] ou [Car06a]) sont désignés par des lettres romanes surmontés du symbole « † », les $\mathcal{V}$-schémas formels par des lettres calligraphiques ou gothiques, les k-schémas par des lettres romanes e.g., $P^\dagger$, $\mathcal{P}$, P. De plus, si $P^\dagger$ est un $\mathcal{V}$-schéma formel faible, $\mathcal{P}$ indique le $\mathcal{V}$-schéma formel induit par complétion p-adique et P sa fibre spéciale (de même pour des relations analogues).

Si $f : P^{\dagger\prime} \to P^\dagger$ est un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels faibles lisses, par abus de notations, $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ et f_0 ou $f : P' \to P$ seront les morphismes induits. On note d_P la dimension de P. Lorsque T et T' sont respectivement des diviseurs de P et P' tels que $f(P' \setminus T') \subset P \setminus T$, on note $f^!_{T',T}$ et $f_{T,T',+}$ les foncteurs image inverse extraordinaire, image directe par f (voir [Ber02, 3.4, 3.5, 4.3] et [Car06b, 1.1.5]) à singularités surconvergentes le long de T et T'. Si $T' = f^{-1}(T)$, on écrit $f^!_T$ et $f_{T,+}$ ou simplement $f^!$ et f_+ (car d'après [Car06b, 1.1.8 et 1.1.9], modulo des foncteurs oublis, ceux-ci sont canoniquement isomorphes). Si X est un sous-schéma fermé de P, $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X$ désigne le foncteur cohomologique local à support strict dans X (au sens de [Car04b, 2.2.6]) et $({}^\dagger X)$ le foncteur restriction en dehors de X ([Car04b, 2.2.6]). Pour tout diviseur T de P, le foncteur dual $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-linéaire (voir [Vir00, I.3.2] pour la définition des foncteurs duaux) se note $\mathbb{D}_{\mathcal{P},T}$ ou $\mathbb{D}_T$. Le schéma formel de base étant toujours $\mathrm{Spf}\,\mathcal{V}$, on note sans ambiguïté $\boxtimes^\dagger_{\mathbb{L}}$ le produit tensoriel externe (voir [Ber02, 4.3.5]). Si T est l'ensemble vide, nous omettrons de l'indiquer dans toutes ces opérations. On suppose (sans nuire à la généralité) les k-schémas réduits.

Soient $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur un espace topologique X. Si $*$ est l'un des symboles $+$, $-$, ou b, $D^*(\mathcal{A})$ désigne la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{A}$-modules (à gauche) vérifiant les conditions correspondantes d'annulation des faisceaux de cohomologie. Lorsque l'on souhaite préciser entre droite et gauche, on précise alors comme suit $D^*({}^{\mathrm{g}}\mathcal{A})$ ou $D^*(\mathcal{A}^{\mathrm{d}})$. On note $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$ des

complexes à cohomologie cohérente et bornée.

1. Sur les produits tensoriels de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques

Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, T un diviseur de P.

1.1. Nous disposons de la catégorie des faisceaux quasi-cohérents : $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T))$ (voir les notations [Car06b, 1.1.3]). Rappelons (voir [Car06b, 1.1]) que les opérations cohomologique de [Ber02, 4.3] peuvent s'étendre à la catégorie $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T))$: pour tous $\mathcal{E},\mathcal{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}({}^{\mathrm{g}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T))$ et $\mathcal{M} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T)^{\mathrm{d}})$, on pose

$$\mathcal{M}_i := \mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T)} \mathcal{D}^{(m)}_{P_i}(T),\ \mathcal{E}_i := \mathcal{D}^{(m)}_{P_i}(T) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T)} \mathcal{E},$$
$$\mathcal{M}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T)} \mathcal{E} := \mathbb{R}\varprojlim_i (\mathcal{M}_i \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}^{(m)}_{P_i}(T)} \mathcal{E}_i),\ \mathcal{E}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T)} \mathcal{F} := \mathbb{R}\varprojlim_i (\mathcal{E}_i \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}^{(m)}_{P_i}(T)} \mathcal{F}_i),$$
$$\mathcal{M}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T)} \mathcal{E} := \mathbb{R}\varprojlim_i (\mathcal{M}_i \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(m)}_{P_i}(T)} \mathcal{E}_i). \tag{1.1.1}$$

Pour tous $\mathcal{E}^{(\bullet)},\mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^{\mathrm{g}}\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T))$, $\mathcal{M}^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T)^{\mathrm{d}})$ on pose

$$\mathcal{M}^{(\bullet)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)} := (\mathcal{M}^{(m)} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T)} \mathcal{E}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}, \tag{1.1.2}$$
$$\mathcal{M}^{(\bullet)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)} := (\mathcal{M}^{(m)} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T)} \mathcal{E}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}},\ \mathcal{E}^{(\bullet)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{F}^{(\bullet)} := (\mathcal{E}^{(m)} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T)} \mathcal{F}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}. \tag{1.1.3}$$

Pour tout diviseur $T' \subset T$ de P et tout $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^{\mathrm{g}}\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T'))$, d'après [Car06b, 1.1.8], on bénéficie du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T) \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T')} \mathcal{E}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \arrow[r, equal, "\mathrm{def}"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T')_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)} \arrow[d, dotted, "\sim"'] \\
(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T) \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}}(T')} \mathcal{E}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \arrow[r, equal, "\mathrm{def}"] & \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T')_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)}.
\end{tikzcd} \tag{1.1.4}$$

On définit alors le foncteur $({}^{\dagger}T, T') := \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T')_{\mathbb{Q}}} -$. On écrit aussi $\mathcal{E}^{(\bullet)}({}^{\dagger}T, T') := ({}^{\dagger}T, T')(\mathcal{E}^{(\bullet)})$. Lorsque $T' = \emptyset$, on omet d'indiquer T'. Et de même en remplaçant « g » par « d ».

1.2. De façon similaire à [Ber02, 4.2.2], on dispose du foncteur canonique $\varinjlim : \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T)) \to D(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$. Celui-ci induit une équivalence de catégories entre $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ et une sous-catégorie pleine de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T))$, notée $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T))$ (voir [Ber02, 4.2.4]).

Si $\mathcal{E}^{(\bullet)}$, $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}({}^{\mathrm{g}}\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T))$, $\mathcal{M}^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T)^{\mathrm{d}})$, en notant $\mathcal{E} := \varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)}$, $\mathcal{F} := \varinjlim \mathcal{F}^{(\bullet)}$ et $\mathcal{M} := \varinjlim \mathcal{M}^{(\bullet)}$, on pose

$$\mathcal{M} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E} := \varinjlim \mathcal{M}^{(\bullet)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)} \tag{1.2.1}$$
$$\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{F} := \varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{F}^{(\bullet)} \text{ et } \mathcal{M} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E} := \varinjlim \mathcal{M}^{(\bullet)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)}. \tag{1.2.2}$$

Remarques 1.3. Soient T' un second diviseur de P, $\mathcal{G}^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^{*}\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T))$. Le morphisme canonique : $\mathcal{G}^{(\bullet)}({}^{\dagger}T') \to \mathcal{G}^{(\bullet)}({}^{\dagger}T \cup T')$ est alors un isomorphisme.

En effet, d'après [Car06b, 1.1.8], on a $({}^{\dagger}T \cup T', T) \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger}T \cup T')$ (on omet d'indiquer le foncteur oubli

$oub_T : \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T)) \to \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}))$. En particulier (cas où $T = T'$), $\mathcal{G}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^{(\bullet)}({}^\dagger T)$. De plus, par [Car04b, 2.2.14], $({}^\dagger T') \circ ({}^\dagger T) \xrightarrow{\sim} ({}^\dagger T \cup T')$. On en tire $\mathcal{G}^{(\bullet)}({}^\dagger T') \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^{(\bullet)}({}^\dagger T \cup T')$.

PROPOSITION 1.4. *Soient T' un second diviseur de P, $\mathcal{G}^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^*\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T))$, $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^{\mathrm{g}}\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T'))$. On dispose de l'isomorphisme canonique :*

$$\mathcal{G}^{(\bullet)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^{(\bullet)}({}^\dagger T \cup T') \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T \cup T')_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)}({}^\dagger T \cup T').$$

Démonstration. En utilisant les isomorphismes de 1.3, on obtient

$$\mathcal{G}^{(\bullet)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^{(\bullet)}({}^\dagger T) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)}({}^\dagger T') \underset{1.1.4}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{G}^{(\bullet)}({}^\dagger T) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)}({}^\dagger T')({}^\dagger T) \xrightarrow{\sim}$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^{(\bullet)}({}^\dagger T) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)}({}^\dagger T \cup T') \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^{(\bullet)}({}^\dagger T \cup T') \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T \cup T')_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)}({}^\dagger T \cup T').$$

□

Remarques 1.5. Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ deux $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-cohérents. Le morphisme canonique $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{F} \to \mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{F}$ n'est pas un isomorphisme (e.g., $T \neq \emptyset$, $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$). Par contre, on dispose des suivants :

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{F} \xleftarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{F} \underset{1.4}{\xleftarrow{\sim}} \mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{F}, \tag{1.5.1}$$

où le deuxième isomorphisme, étant évident pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$, découle du lemme sur les foncteurs way-out (voir [Har66]).

2. Commutation de sp_+ aux produits tensoriels : cas de la compactification lisse

Avant de donner les notations de la section, établissons le lemme suivant.

LEMME 2.1. *Soient f, $g : \mathcal{Z}' \to \mathcal{Z}$ deux morphismes de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses dont les morphismes induits sur les fibres spéciales coïncident, D un diviseur de Z tel que $f^{-1}(D)$ soit un diviseur de Z'. Pour tous $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{Z}}(D))$, on dispose du diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
f^!(\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Z},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}')[d_{Z'/Z}] & \xrightarrow[\sim]{} & f^!(\mathcal{E}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Z}',\mathbb{Q}}} f^!(\mathcal{E}') \\
\sim \downarrow \tau_{g,f} & & \sim \downarrow \tau_{g,f} \otimes \tau_{g,f} \\
g^!(\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Z},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}')[d_{Z'/Z}] & \xrightarrow[\sim]{} & g^!(\mathcal{E}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Z}',\mathbb{Q}}} g^!(\mathcal{E}'),
\end{array}$$

les isomorphismes de recollement $\tau_{g,f}$ ayant été définis en [Car05a, 2.1.10].

Démonstration. On se ramène par construction à l'énoncé analogue au niveau des schémas. La vérification est alors une tautologie : cela résulte de la définition de la m-PD-stratification associée à un produit tensoriel de $\mathcal{D}^{(m)}$-modules et de la construction de $\tau_{g,f}$ (induit par un des isomorphismes de cette m-PD-stratification via le diagramme [Car05a, 2.1.1.1]). □

2.2. Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, X un sous-schéma fermé de P et T un diviseur de P, $\mathfrak{U} := \mathcal{P} \setminus T$, $Y := X \setminus T$, $j : Y \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte. On suppose en outre Y lisse sur k. La catégorie des « F-isocristaux surcohérents relatifs à $(\mathcal{P}, T, X)$ » est noté $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ (voir [Car06a, 6.2.1]). Rappelons que ses objets sont les F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{E}$ à support dans X tels que

i) $\mathcal{E}|_{\mathfrak{U}}$ soit dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y \hookrightarrow \mathfrak{U}+}$ (foncteur de [Car05a]) ;

ii) $\mathcal{E}$ et $\mathbb{D}_{\mathcal{P},T}(\mathcal{E})$ soient $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-surcohérents (voir [Car04b]).

Enfin, les flèches sont les morphismes $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-linéaires. Lorsque le diviseur T est vide, il est omis. Rappelons que lorsque $\mathcal{P}$ est propre, la condition « $\mathbb{D}_{\mathcal{P},T}(\mathcal{E})$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent » est inutile (voir [Car06d, 2.3.2]), cette catégorie ne dépend que de Y, se note $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$ et l'on dispose d'une équivalence de catégories $\mathrm{sp}_{Y+} : F\text{-Isoc}^{\dagger}(Y/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$ (voir [Car06d, 2.3.1]).

• Dans la suite de cette section, avec les notations de 2.2, on suppose X lisse et $T_X := T \cap X$ est un diviseur de X. Ces hypothèses sont celles du « cas de la compactification lisse ». Cette dénomination vient du fait, que lorsque P est propre, X devient une compactification lisse de Y.

2.3. Supposons X intègre et, conformément aux notations de [Car05a, 2.5.1], soient $(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ un recouvrement ouvert de $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_{\alpha\beta} := \mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{P}_\beta$, $\mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma} := \mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{P}_\beta \cap \mathcal{P}_\gamma$, $X_\alpha := X \cap P_\alpha$, $X_{\alpha\beta} := X_\alpha \cap X_\beta$ et $X_{\alpha\beta\gamma} := X_\alpha \cap X_\beta \cap X_\gamma$. De plus, on note $T_\alpha := T \cap P_\alpha$, Y_α l'ouvert de X_α complémentaire de T, $Y_{\alpha\beta} := Y_\alpha \cap Y_\beta$, $Y_{\alpha\beta\gamma} := Y_\alpha \cap Y_\beta \cap Y_\gamma$, $j_\alpha : Y_\alpha \hookrightarrow X_\alpha$, $j_{\alpha\beta} : Y_{\alpha\beta} \hookrightarrow X_{\alpha\beta}$ et $j_{\alpha\beta\gamma} : Y_{\alpha\beta\gamma} \hookrightarrow X_{\alpha\beta\gamma}$ les immersions ouvertes canoniques. On suppose de plus que, pour tout $\alpha \in \Lambda$, X_α est affine.

Pour tout triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda^3$, choisissons $\mathfrak{X}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{X}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma}$) des $\mathcal{V}$-schémas formels affines et lisses relevant X_α (resp. $X_{\alpha\beta}$, $X_{\alpha\beta\gamma}$), $p_1^{\alpha\beta} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta} \to \mathfrak{X}_\alpha$ (resp. $p_2^{\alpha\beta} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta} \to \mathfrak{X}_\beta$) des relèvements de $X_{\alpha\beta} \to X_\alpha$ (resp. $X_{\alpha\beta} \to X_\beta$).

De même, pour tout triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda^3$, on choisit des relèvements $p_{12}^{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathfrak{X}_{\alpha\beta}$, $p_{23}^{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathfrak{X}_{\beta\gamma}$, $p_{13}^{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathfrak{X}_{\alpha\gamma}$, $p_1^{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathfrak{X}_\alpha$, $p_2^{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathfrak{X}_\beta$, $p_3^{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathfrak{X}_\gamma$, $u_\alpha : \mathfrak{X}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{P}_\alpha$, $u_{\alpha\beta} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta} \hookrightarrow \mathcal{P}_{\alpha\beta}$ et $u_{\alpha\beta\gamma} : \mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma} \hookrightarrow \mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma}$ induisant les morphismes canoniques au niveau des fibres spéciales.

De plus, on note $\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X, (\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ la catégorie définie comme suit :

- un objet est une famille $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}_\alpha}({}^{\dagger}T \cap X_\alpha)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{E}_\alpha$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\alpha}({}^{\dagger}T \cap X_\alpha)_{\mathbb{Q}}$-cohérents, cette famille étant munie d'une donnée de recollement $(\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ (voir [Car05a, 2.5.2.2]),

- un morphisme $((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}) \to ((\mathcal{E}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta'_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})$ est une famille de morphismes $f_\alpha : \mathcal{E}_\alpha \to \mathcal{E}'_\alpha$ commutant aux données de recollement.

Via $((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}) \mapsto ((F^*\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (F^*\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})$, où $F^*\theta_{\alpha\beta}$ désigne la donnée de recollement induite, on obtient une action de Frobenius sur $\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X, (\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$.

D'après [Car05a, 2.5.6], on dispose de la catégorie $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(Y, X, (\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ définie et munie d'une action de Frobenius de façon analogue. Par [Car05a, 2.5.9], les catégories $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(Y, X, (\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ et $\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X, (\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ sont canoniquement équivalentes. Cette équivalence commute à Frobenius.

De plus, on désigne par $\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ l'image essentielle du foncteur $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}$ de [Car05a, 2.5.10]. Lors de la preuve de [Car05a, 2.5.4] (et avec ses notations), nous avons construit le foncteur $\mathcal{L}oc : \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K) \to \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X, (\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ induisant une équivalence de catégories commutant à Frobenius.

Enfin, on note $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ la catégorie des $j^{\dagger}\mathcal{O}_{]X[_{\mathcal{P}}}$-modules cohérents munis d'une connexion surconvergente. Cette catégorie est canoniquement isomorphe à celle des isocristaux sur Y surconvergents le long de T et notée $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(Y, X/K)$ (voir [Ber96a, 2.3.2 et 2.3.7]). Au cours de la preuve de [Car05a, 2.5.7], on a établi l'équivalence de catégories $\mathcal{L}oc : \mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K) \cong \mathrm{Isoc}^{\dagger}(Y, X, (\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$, celle-ci commutant à Frobenius.

2.4. Avec les notations et hypothèses de 2.3, nous définissons le bifoncteur produit tensoriel

$$-\otimes- \;:\; \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X, (\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K) \times \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X, (\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K) \to \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X, (\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K), \tag{2.4.1}$$

en posant, pour tous $((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})$, $((\mathcal{E}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta'_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}) \in \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X, (\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$,

$$((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}) \otimes ((\mathcal{E}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta'_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}) := ((\mathcal{E}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\alpha}({}^{\dagger}T\cap X_\alpha)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta''_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}),$$

où $\theta''_{\alpha\beta}$ est défini par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
p_2^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\beta \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\beta}(^\dagger T\cap X_\beta)_\mathbb{Q}} \mathcal{E}'_\beta) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, dotted, "\sim"', "\theta''_{\alpha\beta}"] & p_2^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\beta) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{\alpha\beta}}(^\dagger T\cap X_{\alpha\beta})_\mathbb{Q}} p_2^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}'_\beta) \arrow[d, "\sim"', "\theta_{\alpha\beta}\otimes\theta'_{\alpha\beta}"] \\
p_1^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\alpha}(^\dagger T\cap X_\alpha)_\mathbb{Q}} \mathcal{E}'_\alpha) \arrow[r, "\sim"'] & p_1^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\alpha) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{\alpha\beta}}(^\dagger T\cap X_{\alpha\beta})_\mathbb{Q}} p_1^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}'_\alpha),
\end{tikzcd} \tag{2.4.2}$$

les isomorphismes horizontaux découlant de la commutation des produits tensoriels aux images inverses extraordinaires (au décalage près) et de 1.5.1. Pour vérifier que ce bifoncteur produit tensoriel a bien un sens, il reste à prouver que les isomorphismes $\theta''_{\alpha\beta}$ satisfont à la condition de cocycle (voir [Car05a, 2.5.2]). Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
p_2^{\alpha\beta\gamma!}(\mathcal{E}_\beta\otimes\mathcal{E}'_\beta) \arrow[r, "\tau", "\sim"'] \arrow[d, dotted, "\sim"', "\theta''^{\alpha\beta\gamma}_{12}"] & p_{12}^{\alpha\beta!}p_2^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\beta\otimes\mathcal{E}'_\beta) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "\theta''_{\alpha\beta}"] & p_{12}^{\alpha\beta!}p_2^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\beta)\otimes p_{12}^{\alpha\beta!}p_2^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}'_\beta) \arrow[r, "\tau\otimes\tau", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "\theta_{\alpha\beta}\otimes\theta'_{\alpha\beta}"] & p_2^{\alpha\beta\gamma!}(\mathcal{E}_\beta)\otimes p_2^{\alpha\beta\gamma!}(\mathcal{E}'_\beta) \arrow[d, "\sim"', "\theta^{\alpha\beta\gamma}_{12}\otimes\theta'^{\alpha\beta\gamma}_{12}"] \\
p_1^{\alpha\beta\gamma!}(\mathcal{E}_\alpha\otimes\mathcal{E}'_\alpha) \arrow[r, "\tau", "\sim"'] & p_{12}^{\alpha\beta!}p_1^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\alpha\otimes\mathcal{E}'_\alpha) \arrow[r, "\sim"'] & p_{12}^{\alpha\beta!}p_1^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}_\alpha)\otimes p_{12}^{\alpha\beta!}p_1^{\alpha\beta!}(\mathcal{E}'_\alpha) \arrow[r, "\tau\otimes\tau", "\sim"'] & p_1^{\alpha\beta\gamma!}(\mathcal{E}_\alpha)\otimes p_1^{\alpha\beta\gamma}(\mathcal{E}'_\alpha),
\end{tikzcd} \tag{2.4.3}$$

où, d'après [Car05a, 2.5.2.1] et avec ses notations, les carrés de droite et de gauche sont commutatifs par définition. Par 2.4.2, il en est de même pour celui de milieu. Or, il découle de 2.1 que les isomorphismes composés horizontaux de 2.4.3 sont les isomorphismes canoniques (de commutation des images inverses extraordinaires aux produits tensoriels). Avec les deux diagrammes analogues à 2.4.3, les conditions de cocycle de $\theta_{\alpha\beta}$ et $\theta'_{\alpha\beta}$ entraînent celle de $\theta''_{\alpha\beta}$. À l'avenir, nous nous bornerons à indiquer les arguments pour vérifier les conditions de cocycle.

LEMME 2.5. *Avec les notations de 2.4, pour tous* $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'\in \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$*, on dispose de l'isomorphisme canonique commutant à Frobenius :*

$$\mathcal{L}oc(\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}'[d_{X/P}]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}oc(\mathcal{E})\otimes\mathcal{L}oc(\mathcal{E}').$$

Démonstration. Le complexe $\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}'[d_{X/P}]$ est à support dans X. De plus, pour tout $\alpha\in\Lambda$, on dispose des isomorphismes canoniques

$$u_\alpha^!(\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}'[d_{X/P}]|_{\mathcal{P}_\alpha}) \xrightarrow{\sim} u_\alpha^!(\mathcal{E}|_{\mathcal{P}_\alpha})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\alpha,\mathbb{Q}}}u_\alpha^!(\mathcal{E}'|_{\mathcal{P}_\alpha}) \underset{1.5.1}{\xrightarrow{\sim}} u_\alpha^!(\mathcal{E}|_{\mathcal{P}_\alpha})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\alpha}(T\cap X_\alpha)_\mathbb{Q}} u_\alpha^!(\mathcal{E}'|_{\mathcal{P}_\alpha}). \tag{2.5.1}$$

Par [Car05a, 2.5.10], il en résulte que $\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}'[d_{X/P}]\in\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$. Il reste à présent à vérifier que les isomorphismes 2.5.1 commutent aux isomorphismes de recollement, ce qui signifie que le diagramme de gauche de

$$\begin{tikzcd}
p_2^{\alpha\beta!}u_\beta^!(\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}'[d_{X/P}]|_{\mathcal{P}_\beta}) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "\tau"] & p_2^{\alpha\beta!}(u_\beta^!(\mathcal{E}|_{\mathcal{P}_\beta})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\beta,\mathbb{Q}}}u_\beta^!(\mathcal{E}'|_{\mathcal{P}_\beta})) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & p_2^{\alpha\beta!}u_\beta^!(\mathcal{E}|_{\mathcal{P}_\beta})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{\alpha\beta},\mathbb{Q}}}p_2^{\alpha\beta!}u_\beta^!(\mathcal{E}|_{\mathcal{P}_\beta}) \arrow[d, "\sim"', "\tau\otimes\tau"] \\
p_1^{\alpha\beta!}u_\alpha^!(\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}'[d_{X/P}]|_{\mathcal{P}_\alpha}) \arrow[r, "\sim"'] & p_1^{\alpha\beta!}(u_\alpha^!(\mathcal{E}|_{\mathcal{P}_\alpha})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\alpha,\mathbb{Q}}}u_\alpha^!(\mathcal{E}'|_{\mathcal{P}_\alpha})) \arrow[r, "\sim"'] & p_1^{\alpha\beta!}u_\alpha^!(\mathcal{E}|_{\mathcal{P}_\alpha})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{\alpha\beta},\mathbb{Q}}}p_1^{\alpha\beta!}u_\alpha^!(\mathcal{E}|_{\mathcal{P}_\alpha})
\end{tikzcd}$$

est commutatif (celui de droite l'est par 2.4.2). La commutativité de son contour découle de 2.1. □

2.6. Avec les notations de 2.3, de façon similaire à 2.4.1, on définit le bifoncteur produit tensoriel

$$-\otimes-\ :\ \mathrm{Isoc}^\dagger(Y,X,(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)\times\mathrm{Isoc}^\dagger(Y,X,(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)\to\mathrm{Isoc}^\dagger(Y,X,(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K).$$

Comme pour 2.5, on construit alors, pour tous $E,E'\in\mathrm{Isoc}^\dagger(\mathcal{P},T,X/K)$, l'isomorphisme canonique commutant à Frobenius :

$$\mathcal{L}oc(E\otimes_{j^\dagger\mathcal{O}_{]X[_\mathcal{P}}}E') \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}oc(E)\otimes\mathcal{L}oc(E'). \tag{2.6.1}$$

LEMME 2.7. *Avec les notations 2.6, soient* $((E_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\eta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}),((E'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\eta'_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})\in \mathrm{Isoc}^\dagger(Y,X,(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$. *On bénéficie de l'isomorphisme canonique commutant à Frobenius :*

$$\mathrm{sp}_*((E_\alpha,\eta_{\alpha\beta})\otimes(E'_\alpha,\eta'_{\alpha\beta}))\xrightarrow{\sim}\mathrm{sp}_*(E_\alpha,\eta_{\alpha\beta})\otimes\mathrm{sp}_*(E'_\alpha,\eta'_{\alpha\beta}),$$

où sp_* *est le foncteur défini dans [Car05a, 2.5.9].*

Démonstration. D'après [Car05a, 2.5.9], en notant $(\mathcal{E}_\alpha,\theta_{\alpha\beta}):=\mathrm{sp}_*(E_\alpha,\eta_{\alpha\beta})$ et de même avec des primes, il revient au même d'établir l'isomorphisme

$$\mathrm{sp}^*((\mathcal{E}_\alpha,\theta_{\alpha\beta})\otimes(\mathcal{E}'_\alpha,\theta'_{\alpha\beta}))\xrightarrow{\sim}\mathrm{sp}^*(\mathcal{E}_\alpha,\theta_{\alpha\beta})\otimes\mathrm{sp}^*(\mathcal{E}'_\alpha,\theta'_{\alpha\beta}).$$

Pour cela, on vérifie que les isomorphismes canoniques $\mathrm{sp}^*(\mathcal{E}_\alpha\otimes\mathcal{E}'_\alpha)\xrightarrow{\sim}\mathrm{sp}^*(\mathcal{E}_\alpha)\otimes\mathrm{sp}^*(\mathcal{E}'_\alpha)$ commutent aux isomorphismes de recollement respectifs. □

PROPOSITION 2.8. *Pour tous* $E,E'\in\mathrm{Isoc}^\dagger(\mathcal{P},T,X/K)$*, on bénéficie de l'isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}(E\otimes_{j^\dagger\mathcal{O}_{]X[_\mathcal{P}}}E')\xrightarrow{\sim}\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}(E)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}(E')[d_{X/P}] \tag{2.8.1}$$

qui commute à Frobenius.

Démonstration. Le schéma lisse X est la somme directe de ses composantes connexes X_r, pour $r=1,\dots,N$. En notant E_r les isocristaux de $\mathrm{Isoc}^\dagger(Y\cap X_r,X_r/K)\cong\mathrm{Isoc}^\dagger(\mathcal{P},T,X_r/K)$ induits par E,

$$\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}(E)\xrightarrow{\sim}\oplus_{r=1,\dots,N}\mathrm{sp}_{X_r\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}(E_r).$$

On se ramène ainsi au cas où X est irréductible. Vérifions maintenant que le terme de droite de 2.8.1 est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}$. Via la description [Car05a, 2.5.10], l'assertion est locale en $\mathcal{P}$. On peut donc supposer $\mathcal{P}$ affine. Il existe alors un relèvement $u:\mathfrak{X}\hookrightarrow\mathcal{P}$ de $X\hookrightarrow P$ et $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}\xrightarrow{\sim}u_{T,+}\circ\mathrm{sp}_*$. Or, en posant $\mathcal{E}:=\mathrm{sp}_*(E)$ et $\mathcal{E}':=\mathrm{sp}_*(E')$, par adjonction entre image directe et image inverse extraordinaire par u, puis par 1.5.1 et [Car04b, 2.1.4], on obtient :

$$u_{T+}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_\mathfrak{X}(^\dagger T_X)_\mathbb{Q}}\mathcal{E}')\xrightarrow{\sim}u_{T+}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_\mathfrak{X}(^\dagger T_X)_\mathbb{Q}}u^!_Tu_{T+}(\mathcal{E}'))\xrightarrow{\sim}u_{T+}(\mathcal{E})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_\mathcal{P}(^\dagger T)_\mathbb{Q}}u_{T+}(\mathcal{E}'))[d_{X/P}].$$

On a ainsi prouvé que le terme de droite de 2.8.1 est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}$. Pour construire 2.8.1, il est alors équivalent d'établir l'isomorphisme

$$\mathcal{L}oc\circ\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}(E\otimes_{j^\dagger\mathcal{O}_{]X[_\mathcal{P}}}E')\xrightarrow{\sim}\mathcal{L}oc(\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}(E)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}(E')[d_{X/P}]). \tag{2.8.2}$$

Or, on bénéficie de l'isomorphisme canonique $\mathcal{L}oc\circ\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}\xrightarrow{\sim}\mathrm{sp}_*\circ\mathcal{L}oc$ (voir la construction de [Car05a, 2.5.10]), celui-ci commutant aux actions de Frobenius. Par 2.5, 2.6.1 et 2.7, on obtient alors l'isomorphisme 2.8.2.

□

Notations 2.9. Donnons-nous de plus $\mathcal{P}'$ un second $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, X' un sous-schéma fermé lisse de P', T' un diviseur de P' tel que $T'_{X'}:=T'\cap X'$ soit un diviseur de X'. On note $Y':=X'\setminus T'_{X'}$, $\mathcal{P}'':=\mathcal{P}\times\mathcal{P}'$, $X'':=X\times X'$, $Y'':=Y\times Y'$, $j':Y'\subset X'$ et $j'':Y''\subset X''$ les inclusions canoniques, $p:\mathcal{P}''\to\mathcal{P}$, $p':\mathcal{P}''\to\mathcal{P}'$, $a:X''\to X$ et $a':X''\to X'$ les projections canoniques, $T'':=p^{-1}(T)\cup p'^{-1}(T')$.

Soient $E\in\mathrm{Isoc}^\dagger(Y,X/K)$ et $E'\in\mathrm{Isoc}^\dagger(Y',X'/K)$. On dispose des foncteurs canoniques (notés abusivement) $a^*:\mathrm{Isoc}^\dagger(Y,X/K)\to\mathrm{Isoc}^\dagger(Y'',X''/K)$ et $a'^*:\mathrm{Isoc}^\dagger(Y',X'/K)\to\mathrm{Isoc}^\dagger(Y'',X''/K)$ (voir [Ber96a, 2.3.2.2]). On pose $E\boxtimes E':=a^*(E)\otimes_{j''^\dagger\mathcal{O}_{]X''[_{\mathcal{P}''}}}a'^*(E')$.

PROPOSITION 2.10. *Avec les notations 2.9, on dispose de l'isomorphisme canonique commutant à Frobenius :*

$$\mathrm{sp}_{X''\hookrightarrow\mathcal{P}'',T'',+}(E\boxtimes E')\xrightarrow{\sim}\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}(E)\overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^\dagger\mathrm{sp}_{X'\hookrightarrow\mathcal{P}',T',+}(E'). \tag{2.10.1}$$

Démonstration. Notons $\mathcal{E} := \mathrm{sp}_{X\hookrightarrow \mathcal{P},T,+}(E)$ et $\mathcal{E}' := \mathrm{sp}_{X'\hookrightarrow \mathcal{P}',T',+}(E')$. Comme $\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^{\dagger}\mathcal{E}'$ est à support dans X'', on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^{\dagger}\mathcal{E}' &= p^{!}(\mathcal{E})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}'',\mathbb{Q}}} p'^{!}(\mathcal{E}')[-d_P-d_{P'}]\\
&\overset{\sim}{\longleftarrow} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X''}p^{!}(\mathcal{E})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}'',\mathbb{Q}}}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X''}p'^{!}(\mathcal{E}')[-d_P-d_{P'}]\\
&\xrightarrow[1.4]{\sim} ({}^{\dagger}T'')\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X''}p^{!}(\mathcal{E})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}'',\mathbb{Q}}}({}^{\dagger}T'')\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X''}p'^{!}(\mathcal{E}')[-d_P-d_{P'}]. \qquad (2.10.2)
\end{aligned}$$

En utilisant simultanément [Car05a, 4.1.2 et 4.1.8], il vient

$$({}^{\dagger}T'')\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X''}p^{!}(\mathcal{E})[-d_{X'}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{X''\hookrightarrow\mathcal{P}'',T'',+}(a^{*}(E)),$$
$$({}^{\dagger}T'')\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X''}p'^{!}(\mathcal{E}')[-d_{X}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{X''\hookrightarrow\mathcal{P}'',T'',+}(a'^{*}(E')).$$

On termine alors en utilisant 2.8.

□

Rappelons la propriété suivante utilisée dans [Car06a] :

2.11 Propriété $P_{\mathcal{P},T}$. Soit $\mathcal{E}\in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$. On dit que $\mathcal{E}$ vérifie la propriété $P_{\mathcal{P},T}$ si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent (voir [Car04b, 3]) et si pour tout morphisme lisse $\alpha:\mathcal{Q}\to\mathcal{P}$, pour tout sous-schéma fermé $Z\subset Q$, en notant $D:=\alpha^{-1}(T)$, $\mathbb{D}_{\mathcal{Q},D}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\alpha^{!}_{T}(\mathcal{E}))$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Q}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent.

Notations 2.12. Avec les notations de 2.9, supposons $\mathcal{P}=\mathcal{P}'$. En notant $i: X\cap X'\to X$, $i': X\cap X'\to X'$, $\widetilde{j}: Y\cap Y'\subset X\cap X'$ les inclusions canoniques, on désigne abusivement par $i^{*}:\mathrm{Isoc}^{\dagger}(Y,X/K)\to\mathrm{Isoc}^{\dagger}(Y\cap Y',X\cap X'/K)$ et $i'^{*}:\mathrm{Isoc}^{\dagger}(Y',X'/K)\to\mathrm{Isoc}^{\dagger}(Y\cap Y',X\cap X'/K)$ les morphismes canoniques (voir [Ber96a, 2.3.2.2]). On pose $E\otimes E' := i^{*}(E)\otimes_{\widetilde{j}\mathcal{O}_{]X\cap X'[_{\mathcal{P}}}} i'^{*}(E')$.

PROPOSITION 2.13. *On garde les notations et hypothèses de 2.12.*

i) *Le complexe* $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}(E)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathrm{sp}_{X'\hookrightarrow\mathcal{P},T',+}(E')$ *vérifie la propriété* $P_{\mathcal{P},T\cup T'}$ *(voir 2.11).*

ii) *Si $X\cap X'$ est lisse et $(T\cup T')\cap X\cap X'$ est un diviseur de $X\cap X'$ (e.g., $X=X'$), on dispose alors de l'isomorphisme canonique commutant à Frobenius :*

$$\mathrm{sp}_{X\cap X'\hookrightarrow\mathcal{P},T\cup T',+}(E\otimes E')\xrightarrow{\sim}\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}(E)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathrm{sp}_{X'\hookrightarrow\mathcal{P},T',+}(E')[d_X+d_{X'}-d_{X\cap X'}-d_P]. \qquad (2.13.1)$$

Démonstration. Considérons les carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
Y'' \arrow[r, hook] & X'' \arrow[r, hook] & \mathcal{P}'' \\
Y\cap Y' \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\widetilde{j}"] & X\cap X' \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \mathcal{P}, \arrow[u, hook, "\delta"']
\end{tikzcd} \qquad (2.13.2)$$

où δ désigne l'immersion fermée diagonale. En appliquant $\delta^{!}$ à 2.10 on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta^{!}(\mathrm{sp}_{X''\hookrightarrow\mathcal{P}'',T'',+}(E\boxtimes E')) &\xrightarrow{\sim}\delta^{!}(\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}(E)\overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^{\dagger}\mathrm{sp}_{X'\hookrightarrow\mathcal{P},T',+}(E'))\\
&\xrightarrow{\sim}\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}(E)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathrm{sp}_{X'\hookrightarrow\mathcal{P},T',+}(E')[-d_P]. \qquad (2.13.3)
\end{aligned}$$

Avec [Car06a, 6.1.3 et 6.1.4], on vérifie que le terme de gauche de 2.13.3 vérifie $P_{\mathcal{P},T\cup T'}$. D'où la première assertion de la proposition.

Lorsque $X\cap X'$ est lisse et $(T\cup T')\cap X\cap X'$ est un diviseur de $X\cap X'$, par [Car05a, 4.1.8], il arrive

$$\mathrm{sp}_{X\cap X'\hookrightarrow\mathcal{P},T\cup T',+}(E\otimes E')[-d_X-d_{X'}+d_{X\cap X'}]\xrightarrow{\sim}\delta^{!}(\mathrm{sp}_{X''\hookrightarrow\mathcal{P}'',T'',+}(E\boxtimes E')). \qquad (2.13.4)$$

L'isomorphisme 2.13.1 se construit en composant 2.13.4 et 2.13.3.

□

3. Produits tensoriels de F-isocristaux surcohérents

Nous garderons, jusqu'au paragraphe 3.4 exclus, les notations suivantes : soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux $\mathcal{V}$-schémas formels séparés et lisses, T (resp. T') un diviseur de P (resp. P'), $\mathfrak{U}$ (resp. $\mathfrak{U}'$) l'ouvert de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) complémentaire de T (resp. T') et $Y \hookrightarrow U$ (resp. $Y' \hookrightarrow U'$) une immersion fermée avec Y (resp. Y') lisse. On note X et X' les adhérences respectives de Y et Y' dans P et P', $p : \mathcal{P} \times \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$, $p' : \mathcal{P} \times \mathcal{P}' \to \mathcal{P}'$ les projections canoniques et $T'' := p^{-1}(T) \cup p'^{-1}(T')$.

PROPOSITION 3.1. *Pour tous $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$, on a $\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'[d_{X/P}] \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$.*

Démonstration. Il découle de 2.8 que $\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'[d_{X/P}]|_{\mathfrak{U}} = \mathcal{E}|_{\mathfrak{U}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'|_{\mathfrak{U}}[d_{Y/U}]$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y \hookrightarrow \mathfrak{U}+}$. Il reste à prouver que $\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'[d_{X/P}]$ satisfait la propriété ii) de 2.2. Supposons dans un premier temps X irréductible. D'après [Car06a, 6.3.1], il existe un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{Y} & \longrightarrow & \widetilde{X} & \xrightarrow{\widetilde{u}} & \widetilde{\mathcal{P}} \\
\downarrow b & & \downarrow a & & \downarrow f \\
Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \mathcal{P},
\end{array}$$

où f est un morphisme propre et lisse de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, le carré de gauche est cartésien, $\widetilde{X}$ est un k-schéma intègre et lisse, $\widetilde{u}$ est une immersion fermée, et a est un morphisme projectif, surjectif, génériquement fini et étale, tel que $a^{-1}(T \cap X)$ soit un diviseur à croisement normaux de $\widetilde{X}$. De plus, $\mathcal{E}$ est un facteur direct de $f_{T+} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\widetilde{X}} f^{!}_{T}(\mathcal{E})$. Il en résulte que $\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'$ est un facteur direct de $f_{T+}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\widetilde{X}} f^{!}_{T}(\mathcal{E})) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'$. Par [Car04b, 2.1.4], on dispose de l'isomorphisme :

$$f_{T+}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\widetilde{X}} f^{!}_{T}(\mathcal{E})) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}' \xleftarrow{\sim} f_{T+}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\widetilde{X}} f^{!}_{T}(\mathcal{E}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{P}},\mathbb{Q}}} f^{!}_{T}(\mathcal{E}'))[-d_{\widetilde{P}/P}].$$

Or, d'après la caractérisation de l'image essentielle du foncteur $\mathrm{sp}_{\widetilde{X} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}, f^{-1}(T),+}$ (voir [Car05a, 2.5.10]), il existe des F-isocristaux $\widetilde{E}$ et $\widetilde{E}'$ sur $\widetilde{Y}$ surconvergents le long de $a^{-1}(T \cap X)$ tels que, $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\widetilde{X}} f^{!}_{T}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{\widetilde{X} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}, f^{-1}(T),+}(\widetilde{E})$, $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\widetilde{X}} f^{!}_{T}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{\widetilde{X} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}, f^{-1}(T),+}(\widetilde{E}')$. Il en découle :

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\widetilde{X}} f^{!}_{T}(\mathcal{E}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{P}},\mathbb{Q}}} f^{!}_{T}(\mathcal{E}')[d_{\widetilde{X}/\widetilde{P}}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\widetilde{X}} f^{!}_{T}(\mathcal{E}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{P}},\mathbb{Q}}} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\widetilde{X}} f^{!}_{T}(\mathcal{E}')[d_{\widetilde{X}/\widetilde{P}}]$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{\widetilde{X} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}, f^{-1}(T),+}(\widetilde{E}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{P}},\mathbb{Q}}} \mathrm{sp}_{\widetilde{X} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}, f^{-1}(T),+}(\widetilde{E}')[d_{\widetilde{X}/\widetilde{P}}] \underset{2.8}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{sp}_{\widetilde{X} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}, f^{-1}(T),+}(\widetilde{E} \otimes_{\mathcal{O}_{]\widetilde{X}[_{\widetilde{\mathcal{P}}}}} \widetilde{E}').$$

Ainsi, $\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'[d_{X/P}]$ est un facteur direct de $f_{T+}(\mathrm{sp}_{\widetilde{X} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}, f^{-1}(T),+}(\widetilde{E} \otimes_{\mathcal{O}_{]\widetilde{X}[_{\widetilde{\mathcal{P}}}}} \widetilde{E}'))$. Les propositions [Car06a, 6.3.4 et 6.1.3] nous permettent alors de conclure le cas où X est irréductible.

Passons maintenant au cas général. Comme Y est lisse, Y est la somme directe de ses composantes connexes Y_r, pour $r = 1, \dots, N$. Comme, pour tout r, les immersions $Y_r \hookrightarrow Y$ et $Y \hookrightarrow U$ sont fermées, on a $X \setminus T = Y$ et $X_r \setminus T = Y_r$, où X_r est l'adhérence schématique de Y_r dans P. Dans un premier temps, vérifions, par récurrence sur N, la $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-surcohérence de $\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'$. Le cas où $N = 1$ résulte de la première étape et de [Car06a, 6.3.4]. Supposons donc le résultat vrai jusqu'à $N-1$ et prouvons-le pour N. Comme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X}(\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'$, on dispose du triangle distingué de Mayer-Vietoris (voir [Car04b, 2.2.16.1]) :

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{(X_1 \cup \dots \cup X_{N-1}) \cap X_N}(\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}') \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X_1 \cup \dots \cup X_{N-1}}(\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}') \oplus \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X_N}(\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}') \to \mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}' \to +1. \quad (3.1.1)$$

D'après [Car04b, 2.2.8 et 3.1.5]

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{(X_1 \cup \dots \cup X_{N-1}) \cap X_N}(\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X_N}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X_1 \cup \dots \cup X_{N-1}}(\mathcal{E}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X_1 \cup \dots \cup X_{N-1}}(\mathcal{E}')). \quad (3.1.2)$$

Par hypothèse de récurrence, par [Car06a, 6.3.5] et via la stabilité de la surcohérence par $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X_N}$, le terme de droite de 3.1.2 est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent. Le terme de gauche de 3.1.1 est donc $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent, et de même pour celui du milieu. On a donc terminé la récurrence.

Il en résulte que

$$\oplus_{r=1,\ldots,N}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X_r}(\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}')\to\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}' \tag{3.1.3}$$

est un morphisme de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-complexes cohérents. Comme celui-ci est un isomorphisme en dehors de T, par [Ber96b, 4.3.12], c'est alors aussi un isomorphisme. De même, l'isomorphisme 3.1.3 est valable en remplaçant $\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}'$ par $\mathcal{E}$ ou bien par $\mathcal{E}'$. Puisque $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X_r}(\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}')\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X_r}(\mathcal{E})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X_r}(\mathcal{E}')$, le premier cas traité (i.e., X irréductible) nous permet de conclure.

□

PROPOSITION 3.2. *Pour tous $\mathcal{E}\in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$ et $\mathcal{E}'\in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}',T',X'/K)$, on a $\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^{\dagger}\mathcal{E}'\in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}\times\mathcal{P}',T'',X\times X'/K)$.*

Démonstration. D'après 2.10.2, on bénéficie de l'isomorphisme

$$\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^{\dagger}\mathcal{E}'\xrightarrow{\sim}({}^{\dagger}T'')\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X\times X'}p^{!}(\mathcal{E})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}\times\mathcal{P}',\mathbb{Q}}}({}^{\dagger}T'')\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X\times X'}p'^{!}(\mathcal{E}')[-d_P-d_{P'}].$$

Par [Car06a, 6.3.5], $({}^{\dagger}T'')\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X\times X'}p^{!}(\mathcal{E})[-d_{X'}],({}^{\dagger}T'')\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X\times X'}p'^{!}(\mathcal{E}')[-d_X]\in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}\times\mathcal{P}',T'',X\times X'/K)$. La proposition 3.1 nous permet de conclure.

□

PROPOSITION 3.3. *On suppose $\mathcal{P}=\mathcal{P}'$.*

i) *Pour tous $\mathcal{E}\in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T,X/K)$, $\mathcal{E}'\in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T',X'/K)$, $\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}'$ vérifie $P_{\mathcal{P},T\cup T'}$.*

ii) *Si $Y\cap Y'$ est lisse, en notant X'' l'adhérence de $Y\cap Y'$ dans P, alors*

$$\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}'[d_Y+d_{Y'}-d_{Y\cap Y'}-d_P]\in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P},T\cup T',X''/K).$$

Démonstration. La première assertion résulte de [Car06a, 6.1.3], de 3.2 et de l'isomorphisme $\delta^{!}(\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^{\dagger}\mathcal{E}')\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}'[-d_P]$, où $\delta:\mathcal{P}\hookrightarrow\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ désigne l'immersion fermée diagonale.

Traitons à présent la seconde. Soient G (resp. G') un F-isocristal convergent sur Y (resp. Y') tel que $\mathrm{sp}_{Y\hookrightarrow\mathfrak{U},+}(G)\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}|\mathfrak{U}$ (resp. $\mathrm{sp}_{Y'\hookrightarrow\mathfrak{U}',+}(G')\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}'|\mathfrak{U}'$). On note respectivement $\widetilde{G}$ et $\widetilde{G}'$ les F-isocristaux convergents sur $Y\cap U'$ et $Y'\cap U$ induits par G et G'. Par [Car05a, 4.1.8],

$$\mathcal{E}|\mathfrak{U}\cap\mathfrak{U}'\xrightarrow{\sim}\mathrm{sp}_{Y\cap U'\hookrightarrow\mathfrak{U}\cap\mathfrak{U}',+}(\widetilde{G})[d_{Y\cap U'/Y}],\ \mathcal{E}'|\mathfrak{U}\cap\mathfrak{U}'\xrightarrow{\sim}\mathrm{sp}_{Y'\cap U\hookrightarrow\mathfrak{U}\cap\mathfrak{U}',+}(\widetilde{G}')[d_{Y'\cap U/Y'}].$$

Il en découle :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}'|\mathfrak{U}\cap\mathfrak{U}'&\xrightarrow{\sim}\mathrm{sp}_{Y\cap U'\hookrightarrow\mathfrak{U}\cap\mathfrak{U}',+}(\widetilde{G})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{U}\cap\mathfrak{U}',\mathbb{Q}}}\mathrm{sp}_{Y'\cap U\hookrightarrow\mathfrak{U}\cap\mathfrak{U}',+}(\widetilde{G}')[d_{Y\cap U'/Y}+d_{Y'\cap U/Y'}]\\&\underset{2.13.ii)}{\xrightarrow{\sim}}\mathrm{sp}_{Y\cap Y'\hookrightarrow\mathfrak{U}\cap\mathfrak{U}',+}(\widetilde{G}\otimes\widetilde{G}')[-d_Y-d_{Y'}+d_{Y\cap Y'}+d_{U\cap U'}].\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Ainsi, comme $d_{U\cap U'}=d_P$, $\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}'[d_Y+d_{Y'}-d_{Y\cap Y'}-d_P]$ satisfait la condition de 2.2.i. La seconde condition résulte de la première assertion que l'on a prouvée.

□

Notations 3.4. Soit Y un k-schéma séparé, lisse, intègre.

• Conformément aux notations de [Car06d, 1.4.3], soit $(Y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ un recouvrement fini de Y par des ouverts affines et, pour tout $\alpha\in\Lambda$, soient $P^{\dagger}_{\alpha}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel faible propre et lisse, X_α un sous-schéma fermé de P_α et T_α un diviseur de P_α tel que $Y_\alpha=X_\alpha\setminus T_\alpha$ (on peut toujours en construire grâce à [Elk73]).

Pour tous $\alpha,\beta,\gamma\in\Lambda$, on note $p_1^{\alpha\beta}:P^{\dagger}_{\alpha}\times_{\mathcal{S}}P^{\dagger}_{\beta}\to P^{\dagger}_{\alpha}$ et $p_2^{\alpha\beta}:P^{\dagger}_{\alpha}\times_{\mathcal{S}}P^{\dagger}_{\beta}\to P^{\dagger}_{\beta}$ les projections canoniques, $X_{\alpha\beta}$ l'adhérence schématique de $Y_\alpha\cap Y_\beta$ dans $P_\alpha\times P_\beta$, $T_{\alpha\beta}=p_1^{\alpha\beta-1}(T_\alpha)\cup p_2^{\alpha\beta-1}(T_\beta)$. De même, on note $X_{\alpha\beta\gamma}$ l'adhérence schématique de $Y_\alpha\cap Y_\beta\cap Y_\gamma$ dans $P_\alpha\times P_\beta\times P_\gamma$ et $T_{\alpha\beta\gamma}$ la réunion des images inverses de T_α, T_β et T_γ par les projections de $P^{\dagger}_{\alpha}\times P^{\dagger}_{\beta}\times P^{\dagger}_{\gamma}$ sur $P^{\dagger}_{\alpha}$, $P^{\dagger}_{\beta}$ et $P^{\dagger}_{\gamma}$.

Pour tous $\alpha,\beta,\gamma\in\Lambda$, soient $Y^{\dagger}_{\alpha\beta}$ et $Y^{\dagger}_{\alpha\beta\gamma}$ des $\mathcal{V}$-schémas formels faibles affines et lisses relevant respectivement $Y_\alpha\cap Y_\beta$ et $Y_\alpha\cap Y_\beta\cap Y_\gamma$, soient $j_1^{\alpha\beta} : Y^{\dagger}_{\alpha\beta}\to Y^{\dagger}_{\alpha}$, $j_2^{\alpha\beta} : Y^{\dagger}_{\alpha\beta}\to Y^{\dagger}_{\beta}$, $j_{12}^{\alpha\beta\gamma} : Y^{\dagger}_{\alpha\beta\gamma}\to Y^{\dagger}_{\alpha\beta}$, $j_{23}^{\alpha\beta\gamma} : Y^{\dagger}_{\alpha\beta\gamma}\to Y^{\dagger}_{\beta\gamma}$ et $j_{13}^{\alpha\beta\gamma} : Y^{\dagger}_{\alpha\beta\gamma}\to Y^{\dagger}_{\alpha\gamma}$ des relèvements des immersions canoniques ouvertes.

• D'après [Car06a, 6.4.3.b)], on bénéficie des foncteurs de la forme :

$$j_1^{\alpha\beta *} := \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X_{\alpha\beta}}\circ({}^{\dagger}T_{\alpha\beta})\circ p_1^{\alpha\beta !}\ :\ F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}_\alpha,T_\alpha,X_\alpha/K)\to F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}_\alpha\times\mathcal{P}_\beta,T_{\alpha\beta},X_{\alpha\beta}/K),$$
$$j_2^{\alpha\beta *} := \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X_{\alpha\beta}}\circ({}^{\dagger}T_{\alpha\beta})\circ p_2^{\alpha\beta !}\ :\ F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}_\beta,T_\beta,X_\beta/K)\to F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}_\alpha\times\mathcal{P}_\beta,T_{\alpha\beta},X_{\alpha\beta}/K),\text{ etc.}\qquad(3.4.1)$$

• On désigne par F-Isoc$^{\dagger\dagger}(Y,(Y_\alpha,\mathcal{P}_\alpha,T_\alpha,X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$, la catégorie définie dans [Car06d, 1.1.2]. Celle-ci ne dépend que de Y et se note alors F-Isoc$^{\dagger\dagger}(Y/K)$ (voir [Car06d, 2.2.4]). Ses éléments sont appelés « F-isocristaux surcohérents sur Y ».

3.5. On garde les notations de 3.4. Soient $\mathcal{E}=((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}),\mathcal{E}'=((\mathcal{E}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\theta'_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})$ deux éléments de F-Isoc$^{\dagger\dagger}(Y,(Y_\alpha,\mathcal{P}_\alpha,T_\alpha,X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$. On définit leur produit tensoriel $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{E}'$ de la manière suivante.

D'après 3.1, $\mathcal{F}_\alpha := \mathcal{E}_\alpha\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}_\alpha,\mathbb{Q}}}\mathcal{E}'_\alpha[d_{X_\alpha/P_\alpha}]\in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}_\alpha,T_\alpha,X_\alpha/K)$. Comme le produit tensoriel commute aux images inverses extraordinaires (à un décalage près) ainsi qu'aux foncteurs cohomologiques locaux à support strict dans un sous-schéma fermé, on obtient, avec les notations 3.4.1, les isomorphismes verticaux du diagramme ci-après :

$$\begin{tikzcd}
j_2^{\alpha\beta *}(\mathcal{F}_\beta) \arrow[r, dotted, "\widetilde{\theta}_{\alpha\beta}"] \arrow[d, "\sim"'] & j_1^{\alpha\beta *}(\mathcal{F}_\alpha) \arrow[d, "\sim"'] \\
j_2^{\alpha\beta *}(\mathcal{E}_\beta)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}_\alpha\times\mathcal{P}_\beta,\mathbb{Q}}} j_2^{\alpha\beta *}(\mathcal{E}'_\beta)[d_{X_{\alpha\beta}/P_\alpha\times\mathcal{P}_\beta}] \arrow[r, "\theta_{\alpha\beta}\otimes\theta'_{\alpha\beta}", "\sim"'] & j_1^{\alpha\beta *}(\mathcal{E}_\alpha)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}_\alpha\times\mathcal{P}_\beta,\mathbb{Q}}} j_1^{\alpha\beta *}(\mathcal{E}'_\alpha)[d_{X_{\alpha\beta}/P_\alpha\times\mathcal{P}_\beta}]
\end{tikzcd}\qquad(3.5.1)$$

qui nous permet de construire par commutativité l'isomorphisme $\widetilde{\theta}_{\alpha\beta} : j_2^{\alpha\beta *}(\mathcal{F}_\beta)\xrightarrow{\sim} j_1^{\alpha\beta *}(\mathcal{F}_\alpha)$. Par transitivité des isomorphismes verticaux de 3.5.1, les isomorphismes $\widetilde{\theta}_{\alpha\beta}$ satisfont à la condition de cocycle. On note alors $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{E}' := ((\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\widetilde{\theta}_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})$ l'objet de F-Isoc$^{\dagger\dagger}(Y,(Y_\alpha,\mathcal{P}_\alpha,T_\alpha,X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ ainsi construit.

On vérifie que la construction de $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{E}'$ ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix de $(Y_\alpha,\mathcal{P}_\alpha,T_\alpha,X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. On obtient ainsi le bifoncteur *produit tensoriel* :

$$-\otimes_{\mathcal{O}_Y}-\ :\ F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)\times F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)\to F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)\qquad(3.5.2)$$

Par [Car06d, 2.2.4], on en déduit aussitôt la construction de ce bifoncteur $-\otimes_{\mathcal{O}_Y}-$ au cas où Y n'est pas intègre, i.e., Y est un k-schéma séparé et lisse.

3.6. Soit $b : Y'\to Y$ un morphisme de k-schémas séparés, lisses, intègres. Soit $(Y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ un recouvrement fini de Y par des ouverts affines et, pour tout $\alpha\in\Lambda$, soient $P^{\dagger}_\alpha$ un $\mathcal{V}$-schéma formel faible propre et lisse, X_α un sous-schéma fermé de P_α et T_α un diviseur de P_α tel que $Y_\alpha = X_\alpha\setminus T_\alpha$. On reprend alors les notations de 3.4. On procède de même pour Y' en rajoutant des primes. En outre, quitte à augmenter Λ, on peut choisir le recouvrement fini $(Y'_{\alpha'})_{\alpha'\in\Lambda'}$ d'ouverts affines de Y' tel que $\Lambda=\Lambda'$ et $Y'_\alpha\subset b^{-1}(Y_\alpha)$. On note alors $b_\alpha : Y'_\alpha\to Y_\alpha$ et $b_{\alpha\beta} : Y'_\alpha\cap Y'_\beta\to Y_\alpha\cap Y_\beta$ les morphismes induits. Quitte à utiliser $\mathcal{P}'_\alpha\times\mathcal{P}_\alpha$, on peut en outre supposer que b_α se prolonge en un morphisme $f_\alpha : \mathcal{P}'_\alpha\to\mathcal{P}_\alpha$. On écrit alors $f_{\alpha\beta} = f_\alpha\times f_\beta : \mathcal{P}'_\alpha\times\mathcal{P}'_\beta\to\mathcal{P}_\alpha\times\mathcal{P}_\beta$. Comme pour 3.4.1, on note $b^*_\alpha := \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X'_\alpha}\circ({}^{\dagger}T'_\alpha)\circ f^!_\alpha$ et $b^*_{\alpha\beta} := \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X'_{\alpha\beta}}\circ({}^{\dagger}T'_{\alpha\beta})\circ f^!_{\alpha\beta}$.

Soit $\mathcal{E}=((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})\in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y,(Y_\alpha,\mathcal{P}_\alpha,T_\alpha,X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$. On pose $\mathcal{E}'_\alpha := b^*_\alpha(\mathcal{E}_\alpha)$. On définit

l'isomorphisme canonique $\theta'_{\alpha\beta} : j_2'^{\alpha\beta *}(\mathcal{E}'_\beta) \xrightarrow{\sim} j_1'^{\alpha\beta *}(\mathcal{E}'_\alpha)$ via le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} j_2'^{\alpha\beta *}(\mathcal{E}'_\beta) & \overset{\theta'_{\alpha\beta}}{\underset{\sim}{\dashrightarrow}} & j_1'^{\alpha\beta *}(\mathcal{E}'_\alpha) \\ \sim\downarrow & & \sim\downarrow \\ b^*_{\alpha\beta} j_2^{\alpha\beta *}(\mathcal{E}_\beta) & \overset{\theta_{\alpha\beta}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & b^*_{\alpha\beta} j_1^{\alpha\beta *}(\mathcal{E}_\alpha), \end{array} \tag{3.6.1}$$

où les isomorphismes verticaux découlent de la commutation à la composition des images inverses (de la forme 3.4.1). Par transitivité de ceux-ci, les isomorphismes $\theta'_{\alpha\beta}$ satisfont à la condition de cocycle. D'où $b^*(\mathcal{E}) := ((\mathcal{E}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta'_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y', (Y'_\alpha, \mathcal{P}'_\alpha, T'_\alpha, X'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$. Comme la construction est indépendante à isomorphisme canonique près des choix de $(Y_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ et $(Y'_\alpha, \mathcal{P}'_\alpha, T'_\alpha, X'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, on a ainsi construit un foncteur $b^* : F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K) \to F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y'/K)$.

Par [Car06d, 2.2.4], on étend la construction de ce foncteur b^* au cas où Y et Y' sont seulement des k-schémas séparés et lisses.

3.7. Soient Y, Y' deux k-schémas séparés et lisses, $p_1 : Y \times Y' \to Y$ et $p_2 : Y \times Y' \to Y'$ les projections canoniques. Pour tous $\mathcal{E} \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$, $\mathcal{E}' \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y'/K)$, on pose $\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{E}' := p_1^*(\mathcal{E}) \otimes p_2^*(\mathcal{E}')$. On dispose ainsi d'un bifoncteur canonique, dit de *produit tensoriel externe*,

$$-\boxtimes- \;:\; F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K) \times F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y'/K) \to F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y \times Y'/K). \tag{3.7.1}$$

4. Commutation de sp_+ aux produits tensoriels

4.1. Soient $P^\dagger$, $P'^\dagger$ deux $\mathcal{V}$-schémas formels faibles lisses et séparés, T (resp. T') un diviseur de P (resp. P'), $U^\dagger$ (resp. $U'^\dagger$) l'ouvert de $P^\dagger$ (resp. $P'^\dagger$) complémentaire de T (resp. T'), $j : U^\dagger \hookrightarrow P^\dagger$ (resp. $j' : U'^\dagger \hookrightarrow P'^\dagger$) l'immersion ouverte et $v : Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger$ (resp. $v' : Y'^\dagger \hookrightarrow U'^\dagger$) une immersion fermée de $\mathcal{V}$-schémas formels faibles. On suppose en outre $Y^\dagger$ et $Y'^\dagger$ affines et lisses. On désigne par X (resp. X') l'adhérence schématique de Y (resp. Y') dans P (resp. P'). On note $P''^\dagger := P^\dagger \times P'^\dagger$, $U''^\dagger := U^\dagger \times U'^\dagger$, T'' le diviseur réduit de P'' d'espace topologique $P'' \setminus U''$, $Y''^\dagger := Y^\dagger \times Y'^\dagger$, $b : Y''^\dagger \to Y^\dagger$ et $b' : Y''^\dagger \to Y'^\dagger$ les projections canoniques.

Soient $E \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K)$ et $E' \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y'/K)$. On dispose des foncteurs canoniques $b^* : F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \to F\text{-Isoc}^\dagger(Y''/K)$ et $b'^* : F\text{-Isoc}^\dagger(Y'/K) \to F\text{-Isoc}^\dagger(Y''/K)$ (voir [Ber96a, 2.3.6] et [Car06d, 1.4.1])). Le produit tensoriel externe de E et E' est défini en posant $E \boxtimes E' := b^*(E) \otimes b'^*(E')$.

4.2. Avec les notations de 4.1, soit $\rho_{Y,X} : F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \to F\text{-Isoc}^\dagger(Y,X/K)$ le foncteur restriction. Celui-ci commute aux produits tensoriels. En effet, choisissons une immersion fermée $Y^\dagger \hookrightarrow \mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}$. Notons $p_1 : P^\dagger \times \mathbb{P}^{n\dagger}_{\mathcal{V}} \to P^\dagger$ et $p_2 : P^\dagger \times \mathbb{P}^{n\dagger}_{\mathcal{V}} \to \mathbb{P}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}$ les projections canoniques, $p_{1,K}$ et $p_{2,K}$ les morphismes induits sur les fibres génériques (en tant qu'espaces analytiques rigides) de leur complété p-adique. Le foncteur $p^*_{1,K}$ (resp. $p^*_{2,K}$) induit l'identité de $F\text{-Isoc}^\dagger(Y,X/K)$ (resp. $\rho_{Y,X}$). On voit ainsi que le foncteur $\rho_{Y,X}$ commute aux produits tensoriels respectifs. En particulier, lorsque $X = Y$, le foncteur $\rho_{Y,Y}$ (ou « F-isocristaux convergents associés ») commute aux produits tensoriels (internes ou externes).

PROPOSITION 4.3. *Avec les notations 4.1, on dispose d'un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{sp}_{Y''^\dagger \hookrightarrow U''^\dagger, T'' +}(E \boxtimes E') \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T +}(E) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^\dagger \mathrm{sp}_{Y'^\dagger \hookrightarrow U'^\dagger, T' +}(E'). \tag{4.3.1}$$

Démonstration. Désignons respectivement par $\widehat{E}$ et $\widehat{E}'$ les F-isocristaux convergents sur Y et Y' induits par E

et E'. Via [Car06a, 5.2.4] (et 4.2 pour le dernier isomorphisme), on bénéficie des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} \mathrm{sp}_{Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T+}(E) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^\dagger \mathrm{sp}_{Y'^\dagger \hookrightarrow U'^\dagger, T'+}(E') | \mathfrak{U}'' &\xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T+}(E) | \mathfrak{U} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^\dagger \mathrm{sp}_{Y'^\dagger \hookrightarrow U'^\dagger, T'+}(E') | \mathfrak{U}' \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{Y \hookrightarrow \mathfrak{U},+}(\widehat{E}) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^\dagger \mathrm{sp}_{Y' \hookrightarrow \mathfrak{U}',+}(\widehat{E}') \\ &\underset{2.10}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{sp}_{Y'' \hookrightarrow \mathfrak{U}'',+}(\widehat{E} \boxtimes \widehat{E}'), \\ \mathrm{sp}_{Y''^\dagger \hookrightarrow U''^\dagger, T''+}(E \boxtimes E') | \mathfrak{U}'' &\xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{Y'' \hookrightarrow \mathfrak{U}'',+}(\widehat{E} \boxtimes \widehat{E}'). \end{aligned}$$

D'après [Car06a, 7.2.4] et 3.2, les deux termes de 4.3.1 sont donc dans $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}'', T'', X \times X'/K)$. On conclut alors par pleine fidélité du foncteur $|\mathfrak{U}'' : F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}'', T'', X \times X'/K) \to F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{U}'', Y''/K)$ (voir [Car06a, 6.5.2]). □

Notations 4.4. Avec les notations de 4.1, on suppose de plus $P^\dagger = P'^\dagger$ et $Y \cap Y'$ lisse. Comme $Y \cap Y'$ est affine et lisse (car P est séparé), il existe grâce à Elkik (voir [Elk73]) un $\mathcal{V}$-schéma formel faible affine et lisse le relevant. On note abusivement $Y^\dagger \cap Y'^\dagger$ un de ces relèvements. On choisit de plus $i : Y^\dagger \cap Y'^\dagger \to Y^\dagger$, $i' : Y^\dagger \cap Y'^\dagger \to Y'^\dagger$ et $Y^\dagger \cap Y'^\dagger \hookrightarrow U^\dagger \cap U'^\dagger$ (la notation $U^\dagger \cap U'^\dagger$ n'est pas abusive puisqu'il s'agit d'une intersection d'ouverts de $P^\dagger$) des relèvements des inclusions respectives canoniques $Y \cap Y' \subset Y$, $Y \cap Y' \subset Y'$ et $Y \cap Y' \subset U \cap U'$. On dispose par [Ber96a, 2.3.6] (voir aussi [Car06d, 1.4.1] et [Ber96a, 2.5.6]) des foncteurs $i^* : F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \to F\text{-Isoc}^\dagger(Y \cap Y'/K)$ et $i'^* : F\text{-Isoc}^\dagger(Y'/K) \to F\text{-Isoc}^\dagger(Y \cap Y'/K)$. On pose alors $E \otimes E' := i^*(E) \otimes i'^*(E')$, le produit tensoriel de droite étant le produit tensoriel usuel dans $F\text{-Isoc}^\dagger(Y \cap Y'/K)$.

PROPOSITION 4.5. *Avec les notations de 4.1, on suppose de plus $P^\dagger = P'^\dagger$.*

i) *Le complexe* $\mathrm{sp}_{Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T+}(E) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathrm{sp}_{Y'^\dagger \hookrightarrow U'^\dagger, T'+}(E')$ *vérifie* $P_{\mathcal{P}, T \cup T'}$ *(voir 2.11).*

ii) *Si $Y \cap Y'$ est lisse (e.g., $Y = Y'$), avec les notations de 4.4, on dispose alors de l'isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{sp}_{Y^\dagger \cap Y'^\dagger \hookrightarrow U^\dagger \cap U'^\dagger, T \cup T',+}(E \otimes E') \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T+}(E) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathrm{sp}_{Y'^\dagger \hookrightarrow U'^\dagger, T'+}(E')[d_Y + d_{Y'} - d_{Y \cap Y'} - d_P]. \tag{4.5.1}$$

Démonstration. De façon similaire à la preuve de 4.3, cela découle de [Car06a, 5.2.4], 2.13.1, [Car06a, 7.2.4], 3.3 et de la pleine fidélité du foncteur $|\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}' : F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T \cup T', \widetilde{X}/K) \to F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}', Y \cap Y'/K)$, où $\widetilde{X}$ est l'adhérence de $Y \cap Y'$ dans P. □

4.6. Reprenons les notations de 3.6. Rappelons que d'après [Car06d, 1.1.4] et avec les notations de [Car06d, 1.4.4], on dispose d'une équivalence de catégories $F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \xrightarrow{\sim} F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, P_\alpha^\dagger, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K)$. Soient $E \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K)$ et $((E_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\eta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in \Lambda})$ l'élément de $F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, P_\alpha^\dagger, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K)$ correspondant. La famille $(b_\alpha^*(E_\alpha))_{\alpha \in \Lambda}$ (calculé via des relèvements de b_α : voir [Car06d, 1.4.1]) est munie d'une structure canonique de recollement induite par $(\eta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in \Lambda}$. L'objet de $F\text{-Isoc}^\dagger(Y'/K)$ correspondant est l'image inverse par b de E, notée $b^*(E)$. On obtient ainsi le foncteur $b^* : F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \to F\text{-Isoc}^\dagger(Y'/K)$. Comme d'habitude, on peut étendre ce foncteur au cas d'un morphisme $b : Y' \to Y$ de k-schémas séparés et lisses.

Posons $U_\alpha^\dagger := P_\alpha^\dagger \setminus T_\alpha$, $U_{\alpha\beta}^\dagger := P_\alpha^\dagger \times P_\beta^\dagger \setminus T_{\alpha\beta}$ et fixons $Y_\alpha^\dagger \hookrightarrow U_\alpha^\dagger$, $Y_{\alpha\beta}^\dagger \hookrightarrow U_{\alpha\beta}^\dagger$ des relèvements respectifs de $Y_\alpha \subset U_\alpha$, $Y_{\alpha\beta} \subset U_{\alpha\beta}$. Et de même pour Y' en rajoutant des primes. Nous avons construit au cours de la preuve [Car06d, 1.4.5], un foncteur

$$\mathrm{sp}_{Y+} : F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, P_\alpha^\dagger, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K) \to F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K)$$

défini par $((E_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\eta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in \Lambda}) \mapsto ((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in \Lambda})$, où, pour tous $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\mathcal{E}_\alpha := \mathrm{sp}_{Y_\alpha^\dagger \hookrightarrow U_\alpha^\dagger, T_\alpha,+}(E_\alpha)$

et $\theta_{\alpha\beta}$ est l'isomorphisme $j_2^{\alpha\beta *}(\mathcal{E}_\beta) \xrightarrow{\sim} j_1^{\alpha\beta *}(\mathcal{E}_\alpha)$ défini via le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} j_2^{\alpha\beta *}(\mathrm{sp}_{Y_\beta^\dagger \hookrightarrow U_\beta^\dagger, T_\beta, +}(E_\beta)) \arrow[r, dotted, "\sim", "\theta_{\alpha\beta}"'] \arrow[d, "\sim"] & j_1^{\alpha\beta *}(\mathrm{sp}_{Y_\alpha^\dagger \hookrightarrow U_\alpha^\dagger, T_\alpha, +}(E_\alpha)) \arrow[d, "\sim"] \\ \mathrm{sp}_{Y_{\alpha\beta}^\dagger \hookrightarrow U_{\alpha\beta}^\dagger, T_{\alpha\beta}, +} j_2^{\alpha\beta *}(E_\beta) \arrow[r, "\sim", "\mathrm{sp}_{Y_{\alpha\beta}^\dagger \hookrightarrow U_{\alpha\beta}^\dagger, T_{\alpha\beta}, +}(\eta_{\alpha\beta})"'] & \mathrm{sp}_{Y_{\alpha\beta}^\dagger \hookrightarrow U_{\alpha\beta}^\dagger, T_{\alpha\beta}, +} j_1^{\alpha\beta *}(E_\alpha), \end{tikzcd} \tag{4.6.1}$$

les isomorphismes verticaux découlant de [Car06a, 5.2.3 et 5.2.6]. Comme les isomorphismes verticaux sont transitifs et sont compatibles aux morphismes de recollement (ceux de la forme [Car06d, 1.4.2] ou [Car05a, 2.1.10]) respectifs (par pleinement fidélité il suffit de le voir en dehors du diviseur, ce qui découle de [Car05a, 2.4.6] et [Car06a, 5.2.4]), les $\theta_{\alpha\beta}$ vérifient ainsi la condition de cocyle.

Ce foncteur induit l'équivalence de catégories : $\mathrm{sp}_{Y+} : F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$.

PROPOSITION 4.7. *Soit $b : Y' \to Y$ un morphisme de k-schémas séparés et lisses. Pour tout $E \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K)$, on bénéficie d'un isomorphisme canonique $b^*\mathrm{sp}_{Y+}(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{Y'+}b^*(E)$ fonctoriel en E.*

Démonstration. On se ramène aussitôt au cas où Y et Y' sont intègres. Avec les notations de 4.6, soit $((E_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\eta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})$ l'élément de $F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, P_\alpha^\dagger, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ associé à E. On dispose de la famille d'isomorphismes : $b_\alpha^*(\mathrm{sp}_{Y_\alpha^\dagger \hookrightarrow U_\alpha^\dagger, T_\alpha, +}(E_\alpha)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{Y_\alpha'^\dagger \hookrightarrow U_\alpha'^\dagger, T'_\alpha, +}(b_\alpha'^*(E_\alpha))$. Comme ce genre d'isomorphismes (de commutation de sp_+ à l'image inverse) est transitif pour la composition des morphismes et commute aux isomorphismes de recollement respectifs (ceux de la forme [Car06d, 1.4.2] ou [Car05a, 2.1.10]), cette famille d'isomorphismes est donc munie d'une donnée de recollement canonique induite par la donnée $(\eta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}$. On obtient alors par recollement l'isomorphisme recherché. □

PROPOSITION 4.8. *Soient Y un k-schéma séparé et lisse, $E, E' \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K)$. Avec les notations 3.5.2, on dispose alors de l'isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{sp}_{Y+}(E) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathrm{sp}_{Y+}(E') \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{Y+}(E \otimes E').$$

Démonstration. Il ne coûte rien de supposer Y et Y' intègres. Reprenons alors les notations de 4.6 (avec $b = Id$). Soient $((E_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\eta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}), ((E'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\eta'_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda})$ les éléments de $F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, P_\alpha^\dagger, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ associés respectivement à E et E'. D'après 3.1, on dispose dans $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha/K)$ de l'isomorphisme canonique :

$$\mathrm{sp}_{Y_\alpha^\dagger \hookrightarrow U_\alpha^\dagger, T_\alpha, +}(E_\alpha \otimes E'_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{Y_\alpha^\dagger \hookrightarrow U_\alpha^\dagger, T_\alpha, +}(E_\alpha) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}_\alpha,\mathbb{Q}}} \mathrm{sp}_{Y_\alpha^\dagger \hookrightarrow U_\alpha^\dagger, T_\alpha, +}(E'_\alpha)[d_{X_\alpha/P_\alpha}]. \tag{4.8.1}$$

Or, on vérifie par construction (voir 3.5.1 et 4.6.1) que le terme de gauche (resp. de droite) de 4.8.1 est muni d'une donnée canonique de recollement et se recolle en $\mathrm{sp}_{Y+}(E \otimes E')$ (resp. $\mathrm{sp}_{Y+}(E) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathrm{sp}_{Y+}(E')$). De plus, l'isomorphisme 4.8.1 commute aux données de recollement respectives. □

PROPOSITION 4.9. *Soient Y, Y' deux k-schémas séparés et lisses, $E \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K)$, $E' \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y'/K)$. Avec les notations 3.7.1, on bénéficie alors de l'isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{sp}_{Y+}(E) \boxtimes \mathrm{sp}_{Y'+}(E') \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{Y\times Y'+}(E \boxtimes E').$$

Démonstration. Cela résulte de 4.7 et 4.8. □

5. Stabilité de la dévissabilité par produits tensoriels

THÉORÈME 5.1. *Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in F\text{-}\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},qc}({}^{\mathrm{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$, Y et Y' deux sous-schémas de P.*

Si $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) se dévisse en F-isocristaux surconvergents sur Y (resp. Y'), alors $\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'$ se dévisse en F-isocristaux surconvergents sur $Y \cap Y'$.

Démonstration. Avec [Car06d, 3.2.15], il ne coûte rien de supposer qu'il existe des diviseurs T et T' de P tels que $Y = \overline{Y} \setminus T$, $Y' = \overline{Y'} \setminus T$, où $\overline{Y}$ et $\overline{Y}'$ sont respectivement l'adhérence de Y et Y' dans P. Par [Car06d, 3.2.7], on se ramène alors au cas où Y est lisse et $\mathcal{E} \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$. À nouveau via [Car06d, 3.2.7], on peut en outre supposer Y' lisse et $\mathcal{E}' \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y'/K)$. Grâce à 3.3.i), $\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}' \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{dév}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T \cup T')_{\mathbb{Q}})$. On conclut alors via [Car06d, 3.2.16 et 3.2.24]. □

5.2. Dans la suite de cette section, nous conserverons les notations suivantes : soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, T un diviseur de P et $\mathfrak{U} := \mathcal{P} \setminus T$. La sous-catégorie pleine de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ (resp. $F\text{-}\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^{\mathrm{g}}\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T)))$ des $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-complexes dévissables en F-isocristaux surconvergents est noté, d'après [Car06a, 8.1.1] (resp. [Car06d, 3.2.19]), $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{dév}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ (resp. $F\text{-}\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{dév}}({}^{\mathrm{g}}\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{P}}(T)))$.

De plus, avec [Car06b, 2.1.2], on désigne par $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$, la sous-catégorie pleine de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ formée des $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-complexes holonomes.

LEMME 5.3. *On suppose P de dimension au plus* 1. *Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$. Il existe un diviseur $T' \supset T$ de P tel que les espaces de cohomologie de $\mathcal{E}(^{\dagger}T')$ soient des F-isocristaux surconvergents sur $P \setminus T'$, i.e., soient $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T')_{\mathbb{Q}}$-cohérents.*

Démonstration. Comme P est somme de ses composantes irréductibles, on se ramène aussitôt au cas où P est intègre de dimension 1 (le cas où P est de dimension nulle est trivial, les diviseurs T et T' étant d'ailleurs vides). Cela découle alors de [Car06b, 2.2.17] et [Car06b, 2.3.3]. □

THÉORÈME 5.4. *Si P est de dimension au plus* 1 *alors*

$$F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{dév}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}) = F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$. Vérifions alors que $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{dév}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$. Par 5.3, il existe un diviseur $T' \supset T$ tel que les espaces de cohomologie de $\mathcal{E}(^{\dagger}T')$ soient des F-isocristaux surconvergents sur $P \setminus T'$. En choisissant $u : \mathcal{T}' \hookrightarrow \mathcal{P}$ un relèvement de l'immersion fermée canonique $T' \hookrightarrow P$, on obtient le triangle de localisation (voir [Ber02, 5.3.6] ou plus explicitement [Car04b, 2.2]) :

$$u_+u^!(\mathcal{E}) \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}(^{\dagger}T') \to u_+u^!(\mathcal{E})[1], \tag{5.4.1}$$

où les espaces de cohomologie de $\mathcal{E}(^{\dagger}T')$ sont des F-isocristaux surconvergents sur Y' et où ceux de $u^!(\mathcal{E})$ sont des F-isocristaux convergents sur $Y \cap T'$. Ainsi $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{dév}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$. La réciproque résulte par dévissage de l'holonomie des F-isocristaux surconvergents sur les courbes lisses (voir [Car06b, 4]). □

Les deux précédents théorèmes donnent le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5.5. *On suppose P de dimension au plus* 1. *Alors, pour tous $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$, $\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{F} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$.*

Rappelons la conjecture de [Car06d, 3.2.25.1)] :

CONJECTURE 5.6. Soit Y un k-schéma séparé et lisse. Pour tout F-isocristal surconvergent sur Y, $\mathrm{sp}_{Y+}(E)$ est un $F\text{-}\mathcal{D}_{Y}$-module arithmétique surholonome (la notion de $F\text{-}\mathcal{D}_{Y}$-module arithmétique surholonome a été définie dans [Car05b, 3.13]).

Remarques 5.7. Via les travaux de Kedlaya (voir [Keda], [Kedb]), il est raisonnable de penser que la « conjecture de monodromie génériquement finie » (terminologie de Shiho et Tsuzuki, voir [Shi02] et [Tsu02]) ou « conjecture de réduction semi-stable » (terminologie de Kedlaya [Ked03]) est sur le point d'être établie. Comme pour la preuve de la surholonomie des F-isocristaux surconvergents unités (voir [Car04a] et [Car05b]), cette conjecture devrait impliquer 5.6. Notons que les travaux de [Car06c] vont dans ce sens.

THÉORÈME 5.8. *Soient Y un sous-schéma fermé de $P \setminus T$.*

Si la conjecture 5.6 est exacte, alors on dispose d'un foncteur canonique dit de produit tensoriel,

$$-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_Y} - \;:\; F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_Y) \times F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_Y) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_Y). \tag{5.8.1}$$

Démonstration. Désignons par X l'adhérence schématique de Y dans P, par $F\text{-}\mathfrak{C}^{+}_{\mathcal{P},T,X}$ la sous-catégorie pleine de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$ des complexes $\mathcal{E}$ vérifiant $({}^{\dagger}X)(\mathcal{E}) = 0$ et $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T}(\mathcal{E}) = 0$.

D'après [Car06d, 3.2.26.1)], la conjecture 5.6 implique l'égalité $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{dév}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}) = F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_Y)$. Avec 5.1, on en déduit le foncteur

$$-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} - [d_{X/P}] \;:\; F\text{-}\mathfrak{C}^{+}_{\mathcal{P},T,X} \times F\text{-}\mathfrak{C}^{+}_{\mathcal{P},T,X} \to F\text{-}\mathfrak{C}^{+}_{\mathcal{P},T,X}. \tag{5.8.2}$$

Pour construire $-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_Y} -$ il s'agit maintenant de vérifier que ceux-ci ne dépendent pas du choix de $(\mathcal{P},T,X)$.

Faisons donc un second choix : soient $\widetilde{\mathcal{P}}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, $\widetilde{T}$ un diviseur de $\widetilde{P}$, et $\widetilde{\mathfrak{U}}$ l'ouvert de $\widetilde{\mathcal{P}}$ complémentaire de $\widetilde{T}$, $Y \hookrightarrow \widetilde{U}$ une immersion fermée et $\widetilde{X}$ l'adhérence respective de Y dans $\widetilde{P}$. Quitte comme d'habitude à utiliser $\mathcal{P} \times \widetilde{\mathcal{P}}$, on peut supposer qu'il existe un morphisme $\widetilde{\mathcal{P}} \to \mathcal{P}$. On dispose alors du diagramme commutatif à isomorphisme canonique près :

$$\begin{tikzcd}
F\text{-}\mathfrak{C}^{+}_{\mathcal{P},T,X} \times F\text{-}\mathfrak{C}^{+}_{\mathcal{P},T,X} \arrow[r, "-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} -[d_{X/P}]"] \arrow[d, "\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\widetilde{X}} f^{!} \times \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\widetilde{X}} f^{!}"', "\cong"] & F\text{-}\mathfrak{C}^{+}_{\mathcal{P},T,X} \arrow[d, "\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\widetilde{X}} f^{!}", "\cong"'] \\
F\text{-}\mathfrak{C}^{+}_{\widetilde{\mathcal{P}},\widetilde{T},\widetilde{X}} \times F\text{-}\mathfrak{C}^{+}_{\widetilde{\mathcal{P}},\widetilde{T},\widetilde{X}} \arrow[r, "-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{P}},\mathbb{Q}}} -[d_{\widetilde{X}/\widetilde{P}}]"] & F\text{-}\mathfrak{C}^{+}_{\widetilde{\mathcal{P}},\widetilde{T},\widetilde{X}}.
\end{tikzcd}$$

□

RÉFÉRENCES

Ber86 P. BERTHELOT – « Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p », *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* (1986), no. 23, p. 3, 7–32, Introductions aux cohomologies p-adiques (Luminy, 1984).

Ber96a ______, « Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. Première partie », Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes, 1996.

Ber96b ______, « -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **29** (1996), no. 2, p. 185–272.

Ber02 ______, « Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules », *Astérisque* (2002), no. 279, p. 1–80, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II.

Car04a D. CARO – « Cohérence différentielle des F-isocristaux unités », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), no. 2, p. 145–150.

Car04b ______, « $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L », *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **54** (2004), no. 6, p. 1943–1996.

Car05a ______, « $\mathcal{D}$-modules arithmétiques associés aux isocristaux surconvergents. Cas lisse », *ArXiv Mathematics e-prints* (2005).

Car05b ______, « $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes. », *ArXiv Mathematics e-prints* (2005).

Car06a ______, « Dévissages des F-complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques en F-isocristaux surconvergents », *Invent. Math.* **166** (2006), no. 2, p. 397–456.

Car06b ______, « Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes », *Compositio Mathematica* **142** (2006), no. 01, p. 169–206.

Car06c ______, « Log-isocristaux convergents et holonomie », *ArXiv Mathematics e-prints* (2006).

Car06d ______, « Overconvergent F-isocrystals and differential overcoherence », *ArXiv Mathematics e-prints* (2006).

dJ96 A. J. DE JONG – « Smoothness, semi-stability and alterations », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1996), no. 83, p. 51–93.

Elk73 R. ELKIK – « Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **6** (1973), p. 553–603 (1974).

Gro68 A. GROTHENDIECK – « Crystals and the de Rham cohomology of schemes », Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, p. 306–358.

Har66 R. HARTSHORNE – *Residues and duality*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

Keda K. S. KEDLAYA – « Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals, I : Unipotence and logarithmic extensions », arXiv :math.NT/0405069.

Kedb K. S. KEDLAYA – « Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals, II : A valuation-theoretic approach », arXiv :math.NT/0508191.

Ked03 K. S. KEDLAYA – « Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals on a curve », *Math. Res. Lett.* **10** (2003), no. 2-3, p. 151–159.

Mer72 D. MEREDITH – « Weak formal schemes », *Nagoya Math. J.* **45** (1972), p. 1–38.

Shi02 A. SHIHO – « Crystalline fundamental groups. II. Log convergent cohomology and rigid cohomology », *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **9** (2002), no. 1, p. 1–163.

Tsu02 N. TSUZUKI – « Morphisms of F-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-isocrystals », *Duke Math. J.* **111** (2002), no. 3, p. 385–418.

Vir00 A. VIRRION – « Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques », *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), no. 1, p. 1–68.

Daniel Caro daniel.caro@math.u-psud.fr
Arithmétique et Géométrie algébrique, Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex , France